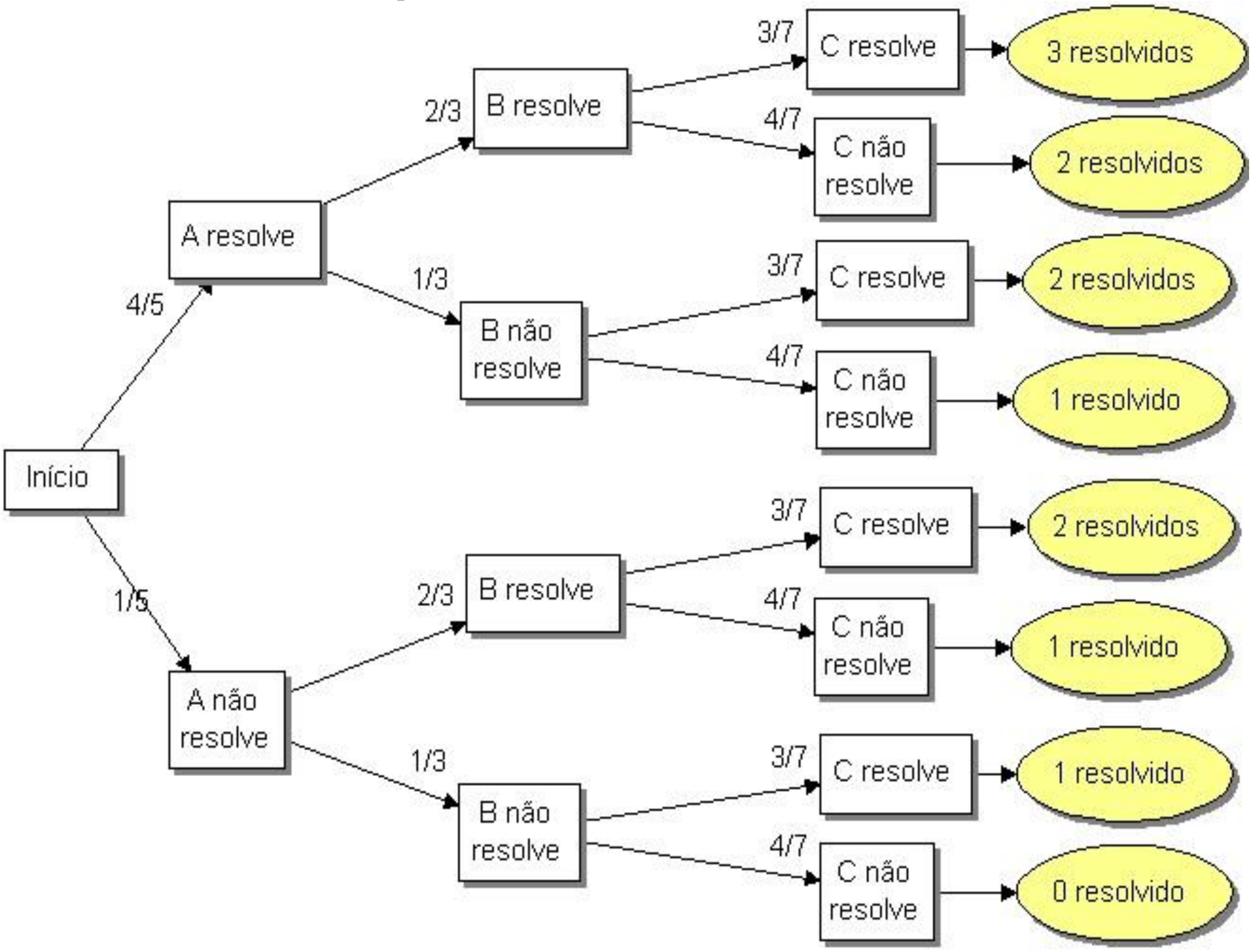
UNIDADE 1

1) Três alunos estão tentando independentemente resolver um problema. A probabilidade de que o aluno A resolva o problema é de 4/5, de B resolver é de 2/3 e de C resolver é de 3/7. Seja X o número de soluções corretas apresentadas para este problema.
a) Construa a distribuição de probabilidades de X.
b) Calcule E(X) e V(X).

Podemos construir uma árvore probabilidades:



X = {0, 1, 2, 3}

Basta calcular as probabilidades para cada valor (3, 2, 1, 0). Cada aluno é <u>independente</u> dos outros.

P(X = 3) = P(A resolve ∩ B resolve ∩ C resolve) = P(A resolve) × P(B resolve) × P(C resolve) = 4/5 × 2/3 × 3/7 = 0,228

P(X = 2) = P[(A resolve ∩ B resolve ∩ C não resolve) ∪ (A resolve ∩ B não resolve ∩ C resolve) ∪ (A não resolve ∩ B resolve ∩ C resolve)]   eventos mutuamente exclusivos:
= 4/5 × 2/3 × 4/7 + 4/5 × 1/3 × 3/7 + 1/5 × 2/3 × 3/7 = 0,476

P(X = 1) = P[(A resolve ∩ B não resolve ∩ C não resolve) ∪ (A não resolve ∩ B resolve ∩ C não resolve) ∪ (A não resolve ∩ B não resolve ∩ C resolve)]   eventos mutuamente exclusivos:
= 4/5 × 1/3 × 4/7 + 1/5 × 2/3 × 4/7 + 1/5 × 1/3 × 3/7 = 0,257

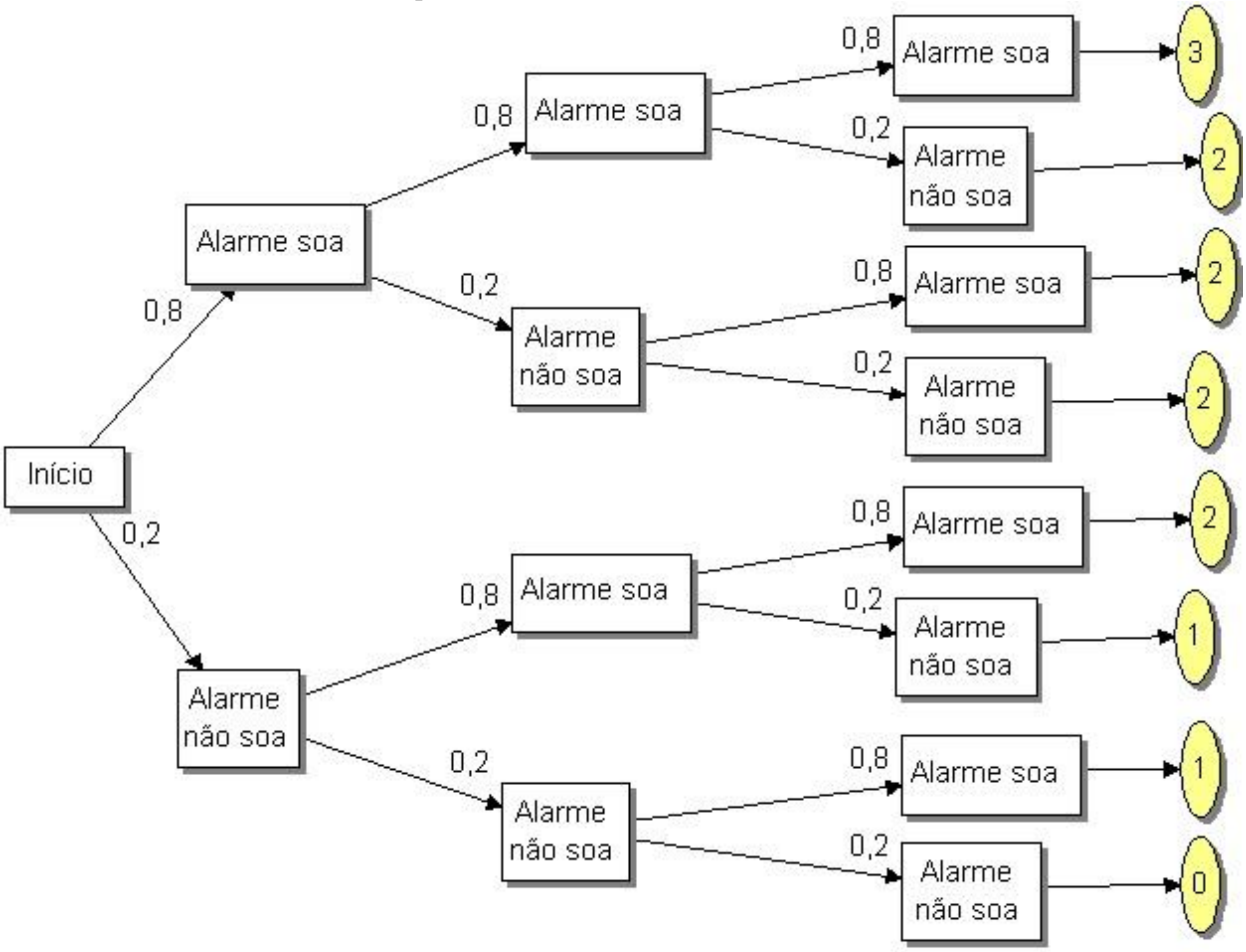
P(X = 0) = P(A não resolve ∩ B não resolve ∩ C não resolve) = 1/5 × 1/3 × 4/7 = 0,038

X	0	1	2	3
p	*0,038*	*0,257*	*0,476*	*0,228*

b) Procedimento semelhante ao dos problemas 1 e 2.

2) Um prédio possui 3 vigias dispostos em vários pontos de onde têm visão do portão de entrada. Se alguém não autorizado entrar, o vigia que o vê faz soar um alarme. Suponha que os vigias trabalham independentemente entre si, e que a probabilidade de que cada um deles veja uma pessoa entrar é 0,8. Seja X o número de alarmes que soam ao entrar uma pessoa não autorizada. Encontre a distribuição de probabilidades de X.

Procedimento semelhante ao do problema 1.



UNIDADE 2

1) Em um determinado processo de fabricação 10% das peças são defeituosas. As peças são acondicionadas em caixas com 5 unidades cada uma. As caixas só serão aceitas se apresentarem no máximo uma peça defeituosa. Pergunta-se:
a) Qual é o modelo teórico mais adequado para este caso? Por quê?
b) Qual é a probabilidade de haver exatamente 3 peças defeituosas em uma caixa?
c) Qual é a probabilidade de uma caixa ser aceita?
d) Qual é a probabilidade de que em um lote de 10 caixas pelo menos 8 sejam aceitas?

a) Binomial: ver motivos em 1 a). $n = 5$ $p = 0{,}1$
b) $P(X = 3) = C_{5,3} \times 0{,}1^3 \times 0{,}9^2 = 0{,}0081$
c) $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = C_{5,0} \times 0{,}1^0 \times 0{,}9^5 + C_{5,1} \times 0{,}1^1 \times 0{,}9^4 = 0{,}91854$
d) Novo $n = 10$, novo $p = 0{,}91854$ => Sucesso: caixa aceita.
$P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$
$= C_{10,8} \times 0{,}91854^8 \times 0{,}08146^2 + C_{10,9} \times 0{,}91854^9 \times 0{,}08146^1 + C_{10,10} \times 0{,}91854^{10} \times 0{,}08146^0 = 0{,}9579$

2) Uma comissão responsável pelo recebimento de equipamentos em uma empresa faz testes em equipamentos selecionados aleatoriamente dentre os que chegam. Para avaliar uma determinada marca de transformadores de pequeno porte, a comissão selecionou aleatoriamente 18 dentre os que chegaram e classificará a marca como satisfatória se não existir nenhum defeituoso nesta amostra. Sabe-se que a produção destes equipamentos apresenta um percentual de 6% de defeituosos.
a) Qual é a probabilidade de que a marca venha a ser considerada satisfatória?
b) Qual é a probabilidade de que no máximo uma amostra, de um grupo de 8 amostras destes transformadores (cada amostra com 18 transformadores) seja considerada satisfatória?
a) Binomial, $n = 18$, $p = 0{,}06$ $P(X = 0) = C_{18,0} \times 0{,}06^0 \times 0{,}94^{18} = 0{,}3283$
b) Binomial, novo $p = 0{,}3283$, novo $n = 8$
$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = C_{8,0} \times 0{,}3283^0 \times 0{,}6717^8 + C_{8,1} \times 0{,}3283^1 \times 0{,}6717^7 = 0{,}2035$

3) Uma operadora de pedágios está preocupada com o dimensionamento de uma de suas praças. Muitos motoristas estão reclamando das filas, pois há apenas duas gôndolas operando todo o tempo. Estudos mostraram que em média 4 carros chegam na praça de pedágio a cada 15 minutos.
a) Qual é a probabilidade de que mais de 2 carros cheguem à praça em 30 minutos?
b) Qual é a probabilidade de que cheguem até 2 carros em um período de uma hora?
c) Você recomenda que a empresa aumente o número de gôndolas? Por quê?
Poisson $\lambda = 4$ *carros/ 15 minutos = 16 carros/hora*
a) $t = 0{,}5$ horas $\lambda \times t = 16 \times 0{,}5 = 8$ *carros*
$P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) + \ldots = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2)$

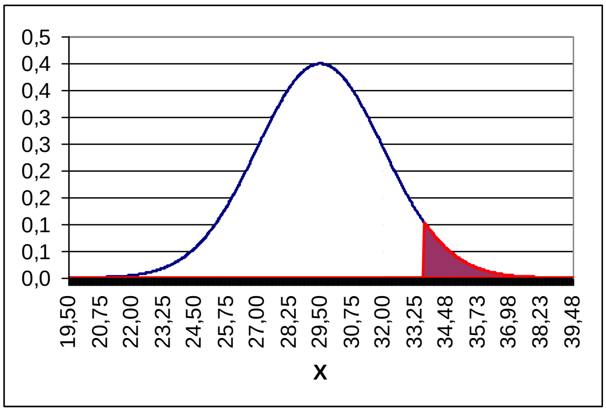
$$= 1 - \left(\frac{e^{-8} \times (8)^0}{0!}\right) - \left(\frac{e^{-8} \times (8)^1}{1!}\right) - \left(\frac{e^{-8} \times (8)^2}{2!}\right) = 0{,}9862$$

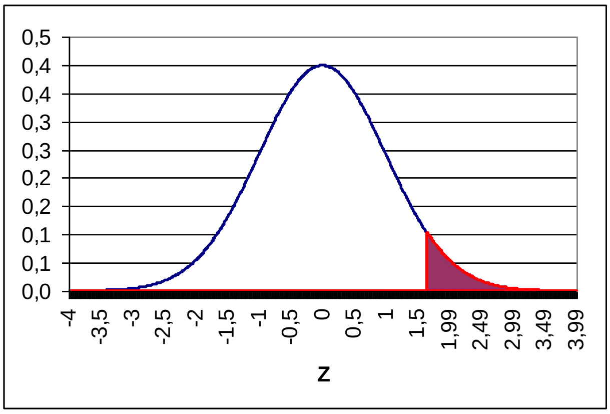
b) $t = 1$ hora $\lambda \times t = 16 \times 1 = 16$ *carros*
$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$$= \left(\frac{e^{-16} \times (16)^0}{0!}\right) + \left(\frac{e^{-16} \times (16)^1}{1!}\right) + \left(\frac{e^{-16} \times (16)^2}{2!}\right) = 0{,}000016318$$

c) Sim, porque a probabilidade de chegarem até 2 carros em uma hora é muito baixa.

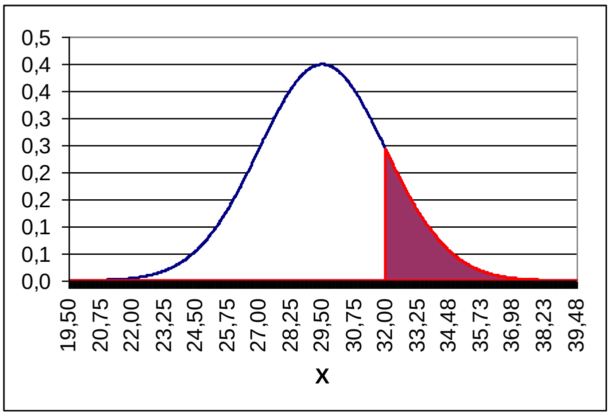
4) Sabe-se que a precipitação anual de chuva em certa localidade, cuja altura é medida em cm, é uma variável aleatória normalmente distribuída com altura média igual a 29,5 cm e desvio padrão de 2,5 cm de chuva.
a) Qual é altura de chuva ultrapassada em cerca de 5% das medições?
b) Se em mais de 45% das vezes a altura de chuva ultrapassar 32 cm torna-se viável a instalação de um sistema para coleta e armazenamento de água da chuva (como complemento à atual malha de abastecimento). É viável instalar o sistema na localidade?
a) Variável aleatória X = precipitação anual em cm, segue distribuição normal com $\mu = 29{,}5$ e $\sigma = 2{,}5$. Precisamos encontrar o valor de X que delimita os 5% maiores valores de X: $P(X>X_1) = 0{,}05$. Com base na equivalência com a distribuição normal padrão: $P(X>X_1) = P(Z>Z_1) = 0{,}05$. Veja os gráficos a seguir:

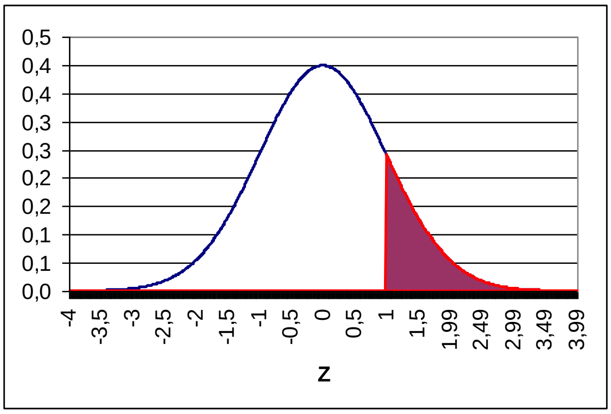




Podemos usar um raciocínio semelhante ao da letra a do Exercício 55. Procurar na tabela pela probabilidade 0,05. Esta probabilidade NÃO EXISTE na tabela, podemos encontrar os valores mais próximos. Na coluna da extrema esquerda vamos encontrar o valor 1,6, e na linha superior vamos encontrar a segunda decimal 0,04 e 0,05: $P(Z>1,64) = 0,0505$ e $P(Z>1,645) = 0,0495$. Como as probabilidades estão à mesma distância de 0,05 fazemos a média dos 2 valores de Z, então $Z_1 = 1,645$. Novamente devemos usar a equação $Z = (x - \mu)/\sigma$, mas isolando o valor de x: $x = \mu + Z \times \sigma$, sabendo que $\mu = 29,5$, $\sigma = 2,5$ e $Z_1 = 1,645$: $x_1 = 29,5 + 1,645 \times 2,5 = 33,6125$ cm.

b) $P(X>32)$. $\mu = 29,5$ e $\sigma = 2,5$, $P(X>32) = P(Z>Z_2)$: $Z_2 = (32 – 29,5)/2,5 = 1,0$. Veja os gráficos a seguir:





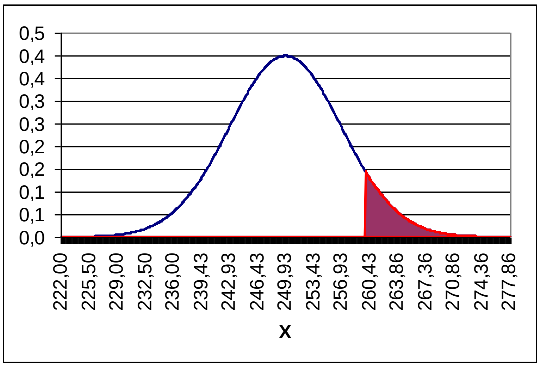
$P(Z>1,0) = 0,1587$. Como a probabilidade é menor do que 0,45 não é viável a instalação do sistema.

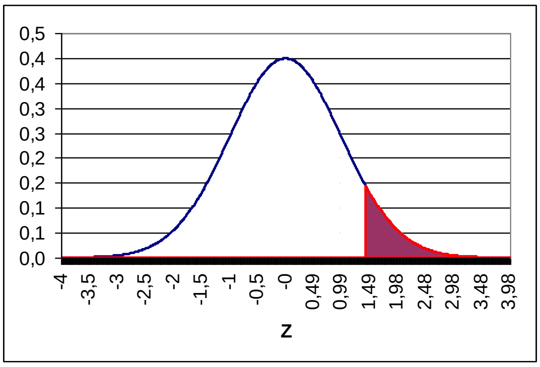
5) O tempo de vida de um determinado componente eletrônico distribui-se normalmente com média de 250 horas e variância de 49 horas^2. Você adquire um destes componentes.

a) Qual é a probabilidade de que seu tempo de vida ultrapasse as 260 horas?

b) Qual deveria ser o prazo de garantia para estes componentes para que o serviço de reposição atendesse a somente 5% dos componentes adquiridos?

a) $P(X>260)$. $\mu = 250$ e $\sigma = 7$, $P(X>260) = P(Z>Z_1)$: $Z_1 = (260 – 250)/7 = 1,43$.





$P(X<260) = P(Z>1,43) = 0,0764$

b) $P(Z<Z_2) = 0,05$. Devido à simetria da distribuição normal padrão à média zero:

$P(Z<Z_2) = 0,05 = P(Z>-Z_2)$. Lembrando da letra a do exercício 62, $-Z_2 = 1,645$, então $Z_2 = -1,645$. Novamente devemos usar a equação $Z = (x - \mu)/\sigma$, mas isolando o valor de x: $x = \mu + Z\times\sigma$, sabendo que $\mu = 250$, $\sigma = 7$ e $Z_2 = -1,645$: $x_2 = 250 - 1,645 \times 7 = 238,48$h. Para repor apenas 5% da produção o prazo máximo de garantia deveria ser de 238,48 h.

6) Imagine que a UFSC tivesse antecipado os resultados abaixo, referentes aos candidatos não eliminados, antes de divulgar a relação com as notas de todos os candidatos.

Pontuação Final Vestibular UFSC - 2002

	Economia	Administração
Média	50,92	55,11
Desvio padrão	9,09	8,22
Vagas/Candidatos	0,370	0,412

Admitindo que as notas são normalmente distribuídas:

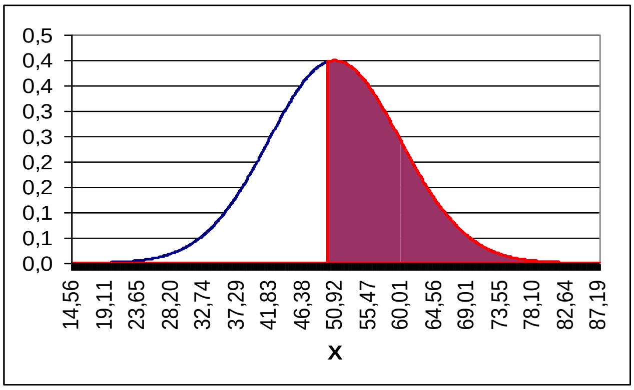
a) O que você responderia para um candidato à Economia que estimasse ter conseguido 50 pontos? Na sua opinião ele conseguiria se classificar? E se ele estimasse ter conseguido 60 pontos?

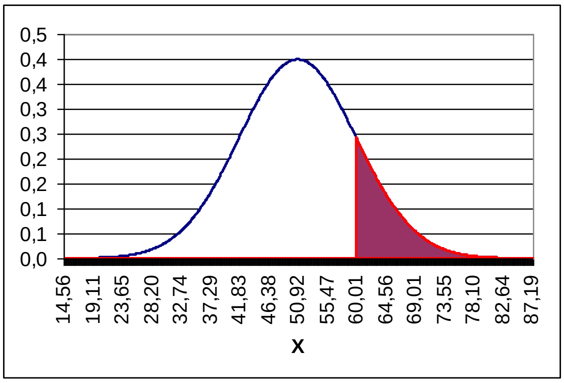
b) O que você responderia para candidatos aos cursos de Economia e Administração que estimassem ter conseguido, respectivamente, 55 e 58 pontos?

c) Imagine que você tenha que responder a dezenas de vestibulandos; para poupar trabalho, estime a nota mínima para classificação em cada curso.

O índice de aprovação é obtido calculando a probabilidade de que as notas sejam MAIORES do que os pontos alcançados pelos candidatos. Caso seja menor do que a taxa vagas por candidatos o indivíduo está aprovado, caso contrário está reprovado. No curso de economia a probabilidade associada aos pontos alcançados não pode ser maior do que 0,370 e no de administração 0,412.

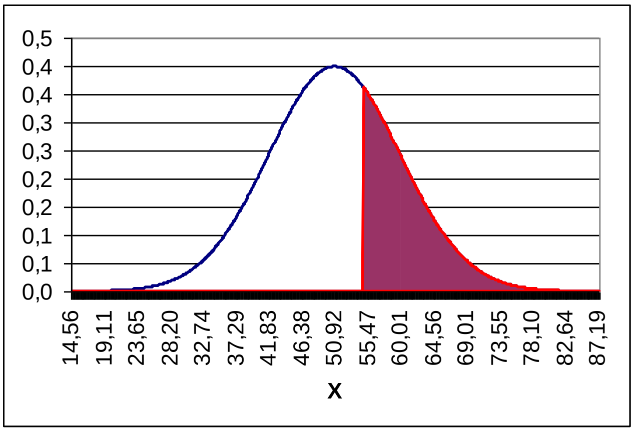
a) Economia $\mu = 50,92$, $\sigma = 9,09$ $\quad$ $P(X>50) = P(Z>Z1)$: $Z1 = (50-50,92)/9,09 = -0,10$.
$P(X>50) = P(Z>-0,10) = 1-P(Z>0,1) = 1-0,4602 = 0,5398 > 0,370$ => candidato reprovado.
$P(X>60) = P(Z>Z2)$: $Z2 = (60-50,92)/9,09 = 1,0$. $P(X>60) = P(Z>1) = 0,1587 < 0,370$ => candidato aprovado.

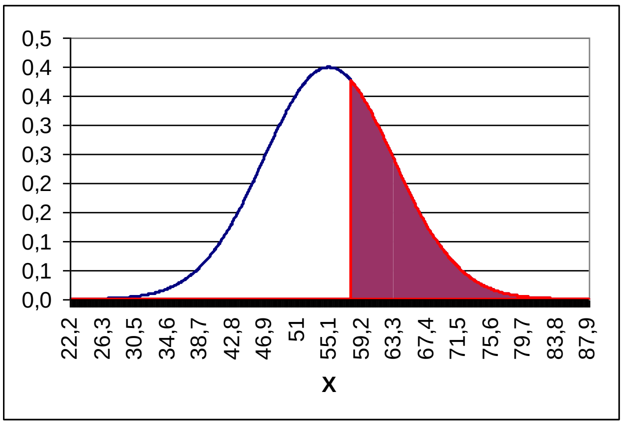




P(X>50) $\qquad$ *P(X>60)*

b) Economia $\mu = 50,92$, $\sigma = 9,09$
$P(X>55 = P(Z>Z1)$: $Z1 = (5550,92)/9,09 = 0,44$
$P(X>50) = P(Z>0,44) = 0,3300 < 0,370$ => candidato aprovado.
Administração $\mu = 55,11$, $\sigma = 8,22$
$P(X>58) = P(Z>Z1)$: $Z1 = (58-55,11)/8,22 = 0,35$.
$P(X>58) = P(Z>0,35) = 0,3632 = < 0,370$ => candidato aprovado.





Economia: P(X>55) *Administração: P(X>58*

c) Basta encontrar x_1 *tal que* $P(X>x_1) = 0{,}370$ *em economia e* x_2 *tal que* $P(X>x_2) = 0{,}412$.
$P(X>x_1) = P(Z>Z_1) = 0{,}370$; $Z_1 \cong 0{,}33$ $P(X>x_2) = P(Z>Z_2) = 0{,}412$; $Z_2 \cong 0{,}22$
Novamente devemos usar a equação $Z = (x - \mu)/\sigma$, *mas isolando o valor de x:* $x = \mu + Z\times\sigma$, *sabendo que:* $\mu = 50{,}92$, $\sigma = 9{,}09$ *em economia e* $Z_1 = 0{,}33$: $x_1 = 50{,}92 + 0{,}33 \times 9{,}09 = 54$.
$\mu = 55{,}11$, $\sigma = 8{,}22$ *em administração e* $Z_2 = 0{,}22$: $x_2 = 55{,}11 + 0{,}22 \times 8{,}22 = 57$.

UNIDADE 3

1) Analise os planos de amostragens apresentados abaixo. Você concorda com a maneira como foram elaborados? Justifique. Apresente as soluções que você julgar necessárias.
a) Para analisar o perfil dos clientes de um banco, foram analisados ao longo de um mês 4 clientes por dia, retirados da fila do caixa, variando sistematicamente o horário da coleta.
b) Para ser conhecida a opinião dos estudantes da UFSC sobre o Jornal Universitário, foram colhidas as opiniões de 40 estudantes da última fase do curso de Jornalismo daquela instituição.
c) Há interesse em medir o índice de luminosidade das salas de aula da UFSC. A coleta de dados será feita em todos os centros da UFSC, durante os períodos diurno e noturno, nas salas que estiveram desocupadas no momento da pesquisa. Cada centro será visitado apenas uma vez.
d) As constantes reclamações dos usuários motivaram a direção da Biblioteca Central da UFSC a realizar uma pesquisa sobre o nível de ruído em suas dependências. O ruído será medido em todas as seções da Biblioteca, na primeira e na penúltima semanas do semestre, de segunda a sábado, durante todo o horário de funcionamento.
e) No controle de qualidade de uma fábrica de peças, que trabalha 24 horas por dia, sete dias por semana, um item produzido é retirado de cada máquina, a cada meia hora, para avaliação. O procedimento é feito durante todo o dia, ao longo da semana.
f) O Comando de um Batalhão da Polícia Militar de Santa Catarina quer conhecer a opinião das pessoas que residem em sua área de atuação, no intuito de formular novas escalas de policiamento ostensivo. Para tanto serão feitas entrevistas com as pessoas que se passarem a pé pela frente do Batalhão, de segunda à sexta das 8:30 às 12:00 horas e das 14:00 às 17:30 horas durante duas semanas.
g) Com a finalidade de estudar o perfil dos consumidores de um supermercado, observaram-se os consumidores que compareceram ao supermercado no primeiro sábado do mês.
h) Com a finalidade de estudar o perfil dos consumidores de um supermercado, fez-se a coleta de dados durante um mês, tomando a cada dia um consumidor de cada fila de cada caixa, variando-se sistematicamente o horário de coleta dos dados.
i) Para avaliar a qualidade dos itens que saem de uma linha de produção, observaram-se todos os itens das 14 às 14 horas e trinta minutos.
j) Para avaliar a qualidade dos itens que saem de uma linha de produção, observou-se um item a cada meia hora, durante todo o dia.

k) Para estimar a porcentagem de empresas que investiram em novas tecnologias no último ano, enviou-se um questionário a todas as empresas de um estado. A amostra foi formada pelas empresas que responderam o questionário.

a) *Plano adequado. Monitorou-se o movimento mensal do banco, variando o horário de coleta, possibilitando acompanhar os diferentes tipos de cliente da instituição, e sua freqüência de comparecimento.*

b) *Plano inadequado. Se o objetivo é conhecer a opinião dos alunos da UFSC sobre o jornal, alunos de todos os cursos deveriam ser ouvidos, o plano está incoerente com o objetivo da pesquisa. Deveria ser selecionada uma amostra contendo integrantes de todos os cursos da UFSC, podendo ser estratificada por fase predominante (quanto mais tempo na UFSC maior a probabilidade de ter contato com o jornal e acompanhar sua evolução, o que pode ser relevante).*

c) *Plano inadequado. O problema reside em medir a luminosidade apenas nas salas desocupadas no momento da pesquisa, e em não retornar aos centros mais de uma vez. É preciso medir os índices de luminosidade nos períodos matutino, vespertino e noturno, levando em conta também a posição solar das salas (selecionar as salas a pesquisar com as plantas dos centros de ensino, que devem estar disponíveis no ETUSC ou na Prefeitura Universitária).*

d) *Plano inadequado. Por que apenas na primeira e na penúltima semana do semestre? O ideal seria realizar medidas em todas as semanas.*

e) *Plano adequado. Com este procedimento é possível retratar a qualidade do processo ao longo do tempo (levando em conta os diferentes turnos, operários, condições ambientais), e identificar eventuais problemas, possibilitando a sua prevenção e correção.*

f) *Plano inadequado. Os que não passarem a pé pela frente do batalhão, e nos horários estabelecidos, não terão a menor possibilidade de serem ouvidos, o que pode comprometer a confiabilidade dos resultados da pesquisa. Seria necessário obter uma listagem das residências, utilizar algum mecanismo de sorteio aleatório para selecionar algumas e entrevistar os moradores sobre a necessidade de policiamento ostensivo.*

g) *Plano inadequado. E os que forem ao supermercado em outros dias da semana, ou mesmo em outros sábados do mês? Não terão chance de participar da pesquisa, o que poderá comprometer os resultados. A coleta de dados precisa ser feita todos os dias, ao longo do horário de atendimento, e por pelo menos um mês (para avaliar o efeito das diferentes datas de pagamento no consumo dos clientes).*

h) *Plano adequado. Possibilita captar todo o movimento mensal, e o movimento durante o dia (ver item g).*

i) *Plano inadequado. Suponha que algo aconteça às 14h31min. Um eventual problema somente seria notado quando a avaliação fosse repetida, e então os prejuízos poderiam ser muito grandes.*

j) *Plano adequado. Com este plano todo o processo produtivo é monitorado (de forma semelhante à vista no item e), possibilitando a detecção mais rápida de eventuais problemas.*

k) *Plano inadequado. Provavelmente os respondentes são justamente as empresas que investiram em tecnologia, o que poderia dar a falsa impressão de que a situação está bem melhor do que realmente está. Uma forma de contornar este problema seria conduzir a pesquisa por telefone: obtém-se uma listagem das empresas por porte e ramo de atuação (via FIESC, Fecomércio, CDL's), seleciona-se uma amostra aleatória (estratificada por ramo e porte) e aplica-se um questionário com aqueles que poderiam fornecer informações confiáveis sobre o investimento em tecnologia.*

2) Uma determinada faculdade do interior de Santa Catarina possui 6 cursos, estando os alunos matriculados de acordo com a tabela abaixo:

Curso	Direito	Administração	Economia	Agronomia	Veterinária	Computação
Alunos	250	200	150	150	150	100

A diretoria pretende selecionar, por amostragem, alguns alunos para uma atividade extracurricular.

a) Os cursos direito, administração e economia formam um estrato (sócio-econômicos),

agronomia e veterinária formam outro (agrários) e computação outro estrato (tecnológicos), extraia uma amostra estratificada proporcional de 20 alunos (use o Microsoft Excel ®).
b) Através de uma amostragem de conglomerados de 2 estágios extraia uma amostra aleatória de 21 alunos. Selecione 3 cursos, e depois 7 alunos por curso (use o Microsoft Excel®).
c) Qual das duas amostras você acredita que tem resultados mais confiáveis? JUSTIFIQUE.

a) *Há um total de 1000 alunos na faculdade. O primeiro passo é definir o quanto cada estrato representa da população, para saber quantos elementos da amostra virão de cada um deles.*
Estrato sócio econômicos = (600/1000) x 100 = 60% (então 60% da amostra virá deste estrato, 12 alunos).
Estrato agrários = (300/1000) x 100 = 30% (6 alunos da amostra virão deste estrato).
Estrato tecnológicos = (100/1000) x 100 = 10% (2 alunos da amostra virão deste estrato).
Usando o Microsoft Excel podemos gerar números aleatórios de acordo com uma distribuição uniforme, arredondar os resultados e obter os integrantes da amostra (veja o texto "Como gerar uma amostra aleatória simples com o Microsoft Excel ®", disponível no ambiente virtual).

b) *Há 7 cursos no total, que constituirão o primeiro estágio da amostragem de conglomerados. Usando o Excel ou o Calc podemos gerar 3 números aleatórios para selecionar os cursos. Posteriormente, em cada curso, podemos selecionar 7 alunos , usando o mesmo procedimento (numerando os alunos de 1 até o número total de estudantes de cada curso sorteado).*

c) *A amostragem estratificada proporcional, pois garante que todos os estratos estarão presentes na amostra, representando melhor a variabilidade dos alunos.*

3) Será feito um levantamento por amostragem de uma população de 2000 famílias, para a realização de uma pesquisa.
a) Calcule o tamanho mínimo de uma amostra para que se tenha um erro amostral máximo de 5%.
b) Supondo a população dividida em 2 estratos iguais, qual o tamanho mínimo de amostra para se ter um erro amostral máximo de 5% em cada estrato?
c) Qual seria o erro amostral em cada estrato do item b, se o tamanho da amostra em cada estrato fosse simplesmente o valor definido no item a dividido por 2?

Abaixo as expressões necessárias para a resolução dos problemas:

a) $n_0 = \frac{1}{e_0^2} = \frac{1}{0{,}05^2} = 400 \qquad n = \frac{N \times n_0}{N + n_0} = \frac{2000 \times 400}{2000 + 400} = 333{,}333 \cong 334$

b) *O valor de N será igual a 1000 (2000/2):*

$$n_0 = \frac{1}{e_0^2} = \frac{1}{0{,}05^2} = 400 \qquad n = \frac{N \times n_0}{N + n_0} = \frac{1000 \times 400}{1000 + 400} = 285{,}71 \cong 286$$

Como são dois estratos a amostra terá 572 elementos.

c) *Vamos fazer o caminho inverso: a partir de n (que vale 334/2 = 167), supondo N = 1000, encontrar o e0.*

$167 = \frac{1000 \times n_0}{1000 + n_0}$ *167000 + 167n0 = 1000n0 n0 = 167000/833 = 200,48* $\cong$ *201*

$n_0 = \frac{1}{e_0^2}$, *isolando e0:* $e_0 = \sqrt{\frac{1}{n_0}} = \sqrt{\frac{1}{201}} = 0{,}0705$ *(7,05%)*