ESTATÍSTICA AULA 3

Modelos probabilísticos mais comuns – Unidade 2

Para variáveis aleatórias contínuas – 1ª parte

Professor Marcelo Menezes Reis

Aulas prévias

- Estatística I – Unidade 6:
  - Conceitos básicos de probabilidade:
- Variável aleatória:
  - Conceito, variáveis discretas e contínuas, valor esperado e variância.
- Modelos probabilísticos para variáveis aleatórias discretas:
  - Binomial, Poisson.

Conteúdo desta aula

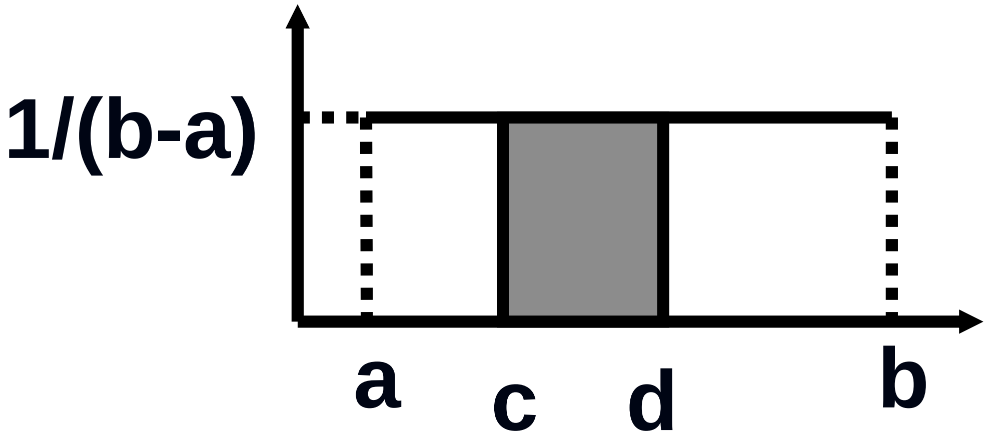
- Principais modelos probabilísticos para variáveis aleatórias contínuas:
  - uniforme,
  - normal.
- Como usá-los no cálculo de probabilidades.

Modelos para variáveis contínuas

- Variáveis aleatórias contínuas: contradomínio infinito.
- Modelo uniforme.
- Modelo normal.
- Modelo t
- Modelo qui-quadrado.

Modelo uniforme

- Faixas de valores de mesma amplitude têm a mesma probabilidade de ocorrer.



Modelo uniforme

$$P(c < X < d) = (d - c) \times \frac{1}{(b - a)}$$

$$E(X) = \frac{a + b}{2} \qquad V(X) = \frac{(b - a)^2}{12}$$

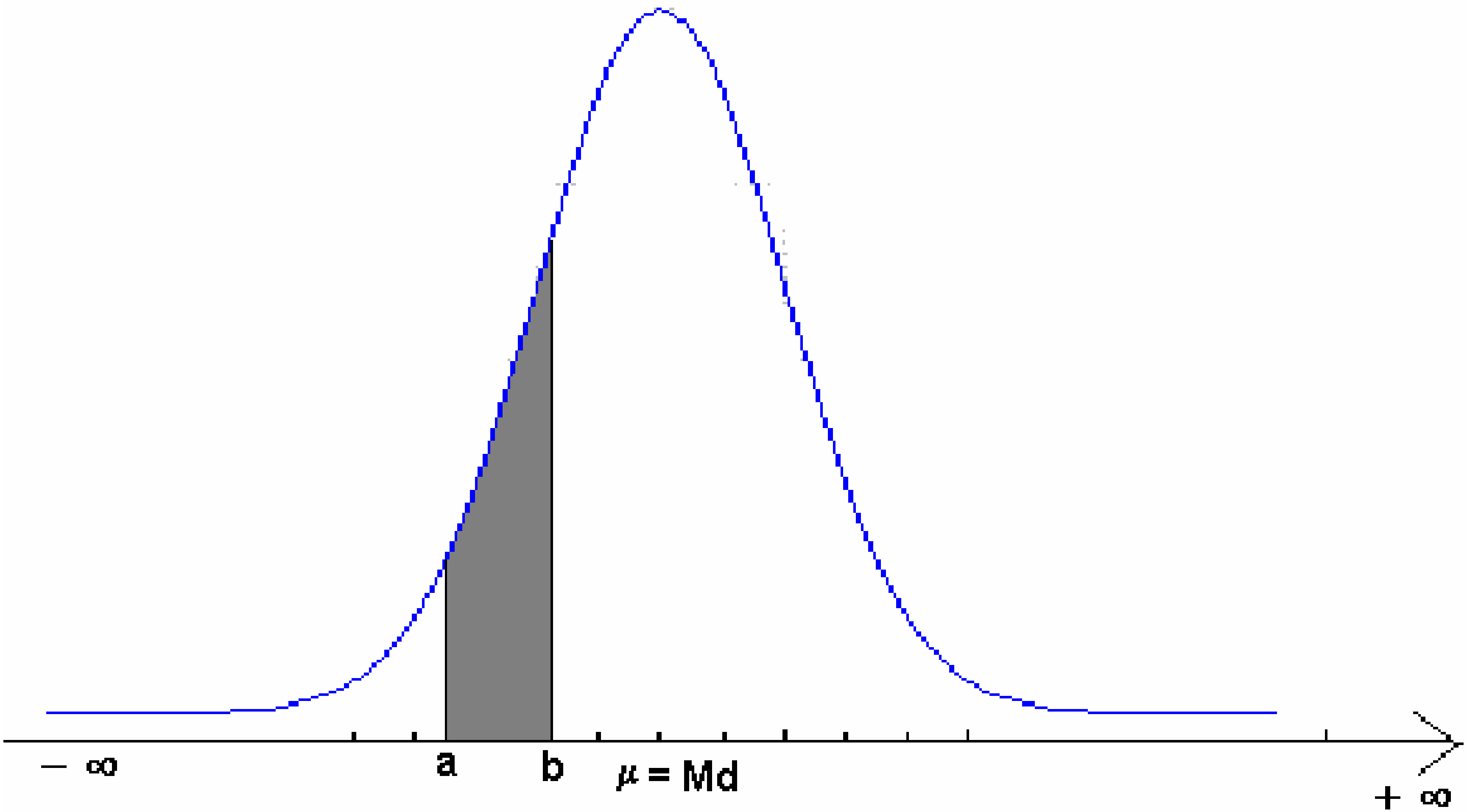
Usado na geração de números pseudo-aleatórios.

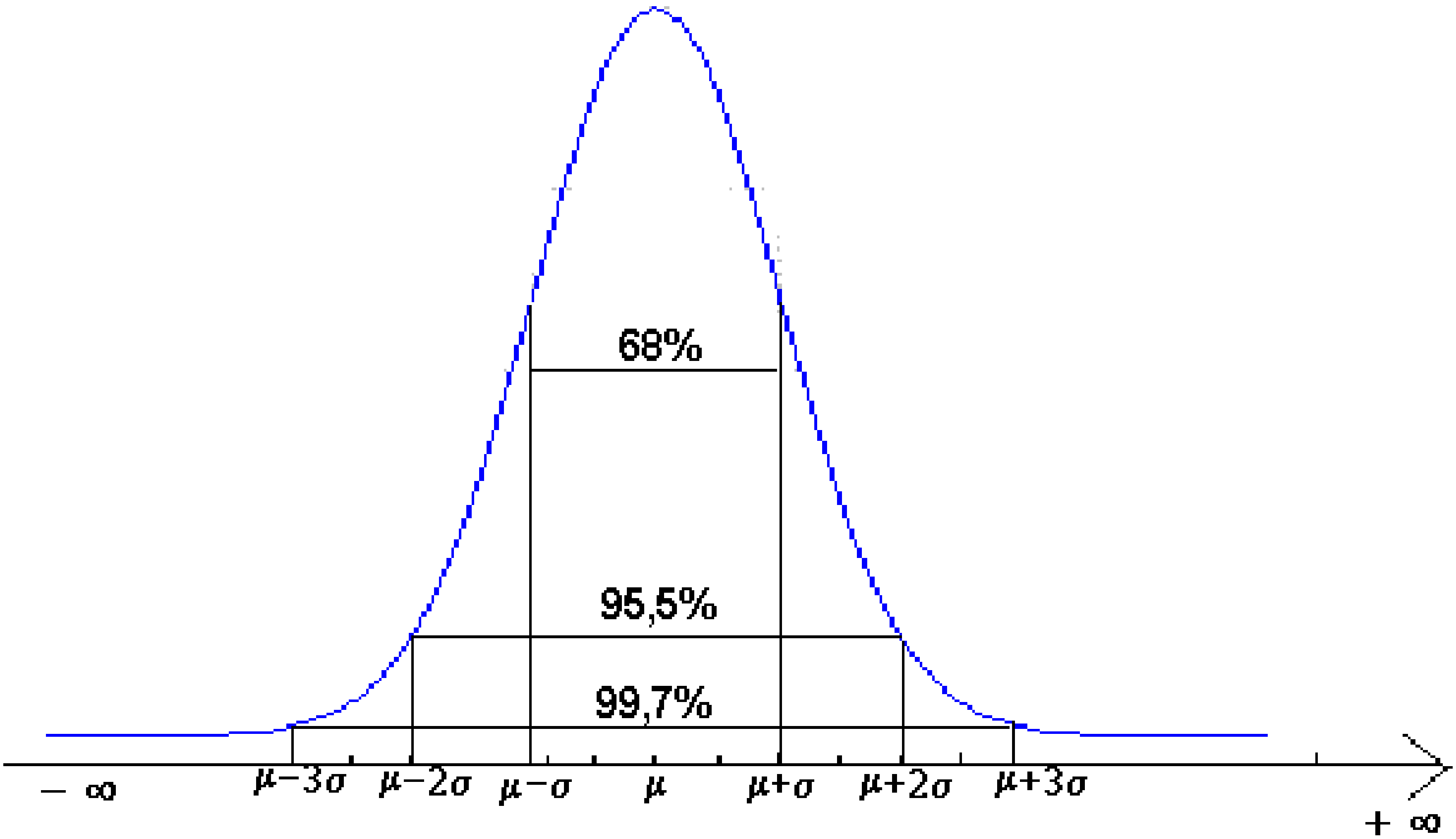
Modelo normal

- Se os dados apresentam distribuição simétrica.
- Se à medida que os valores da variável afastam-se da parte central da distribuição, suas probabilidades de ocorrência diminuem.
- Possibilidade de uso do modelo normal.

Modelo normal

- Dois parâmetros: média (μ) e desvio padrão (σ)
- Muito adequado para descrever várias variáveis aleatórias:
  - Medidas corpóreas.
  - Dimensões de peças fabricadas.
- Importante para inferência estatística.


− ∞
a
b
μ = Md
+ ∞


68%
95,5%
99,7%
− ∞
μ−3σ
μ−2σ
μ−σ
μ
μ+σ
μ+2σ
μ+3σ
+ ∞

Modelo normal

- Para calcular probabilidades de intervalos de valores de uma variável aleatória que siga o modelo normal:
  - Apenas métodos numéricos de integração.
  - Os sábios dos séculos XVIII e XIX fizeram isso, sem computador...

Distribuição normal padrão (z)

- Normal com média = 0 e variância = 1.
  - Probabilidades calculadas para este modelo e registradas em tabela (Tabela 1 do ambiente virtual).
  - Uma normal qualquer pode ser transformada em normal padrão.

Distribuição normal padrão (z)

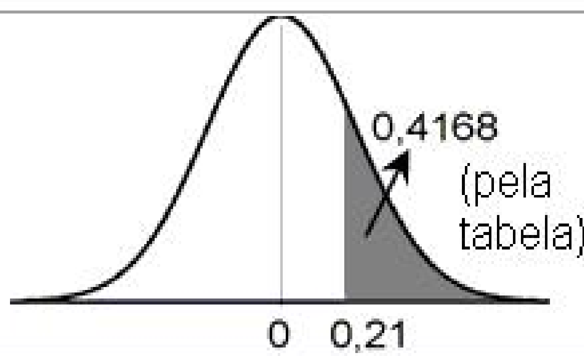
$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

- μ = média de uma normal qualquer.
- σ = desvio padrão de uma normal qualquer.
- x = valor de interesse.
- Z = número de desvios padrões a partir da média (se $x < \mu$, z será negativo).

Tabela da normal padrão

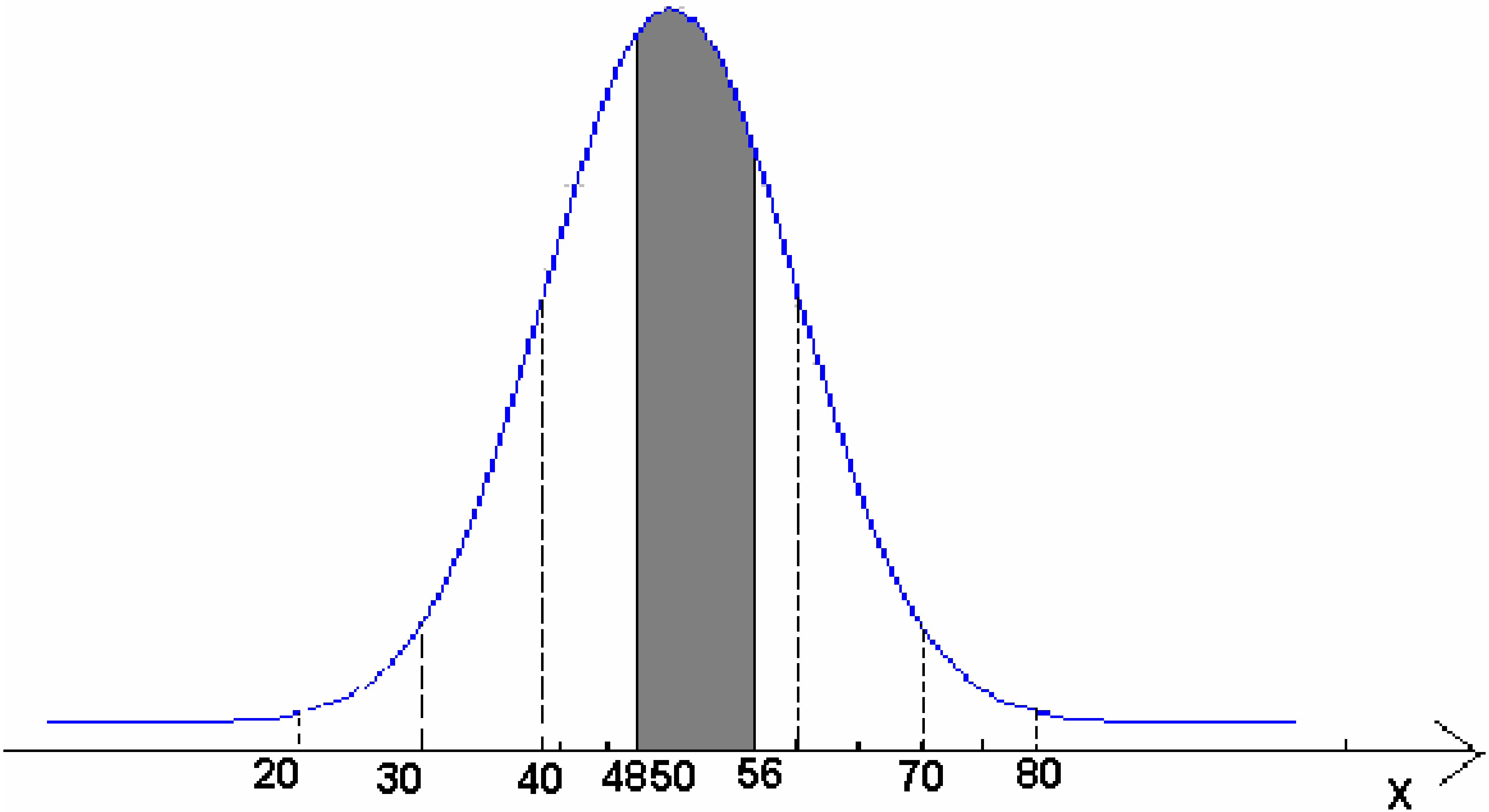
- Valor de z com duas casas decimais:
  - $P(Z > z)$ => cauda superior.

	segunda decimal de z				
z	0,00	0,01	0,02	...	0,09
0,0					
0,1					
0,2		0,4168			
...					
	(área na cauda superior)				



Exemplo 1

- Veja o Exemplo 5, item d da Unidade 2.
- Considere que uma variável aleatória X segue um modelo normal com média igual a 50 e desvio padrão = 10.
- Calcule a probabilidade de X assumir valores entre 48 e 56.


20
30
40
48
50
56
70
80
X

Exemplo 1

- Precisamos encontrar os valores de z correspondentes a 48 e 56.
- $Z_1 = (48 - 50)/ 10 = - 0,20$
- $Z_2 = (56 - 50)/ 10 = 0,60$
- Então: $P (48 < X < 56) = P (-0,20 < Z < 0,60)$

Exemplo 1

- Repare que a área entre 48 e 56 é igual à área de 48 até $+\infty$ MENOS a área de 56 até $+\infty$.
- $P(48<X<56) = P(X>48) - P(X>56) = P(-0,20<Z<0,60) = P(Z>-0,20) - P(Z>0,60)$

Exemplo 1

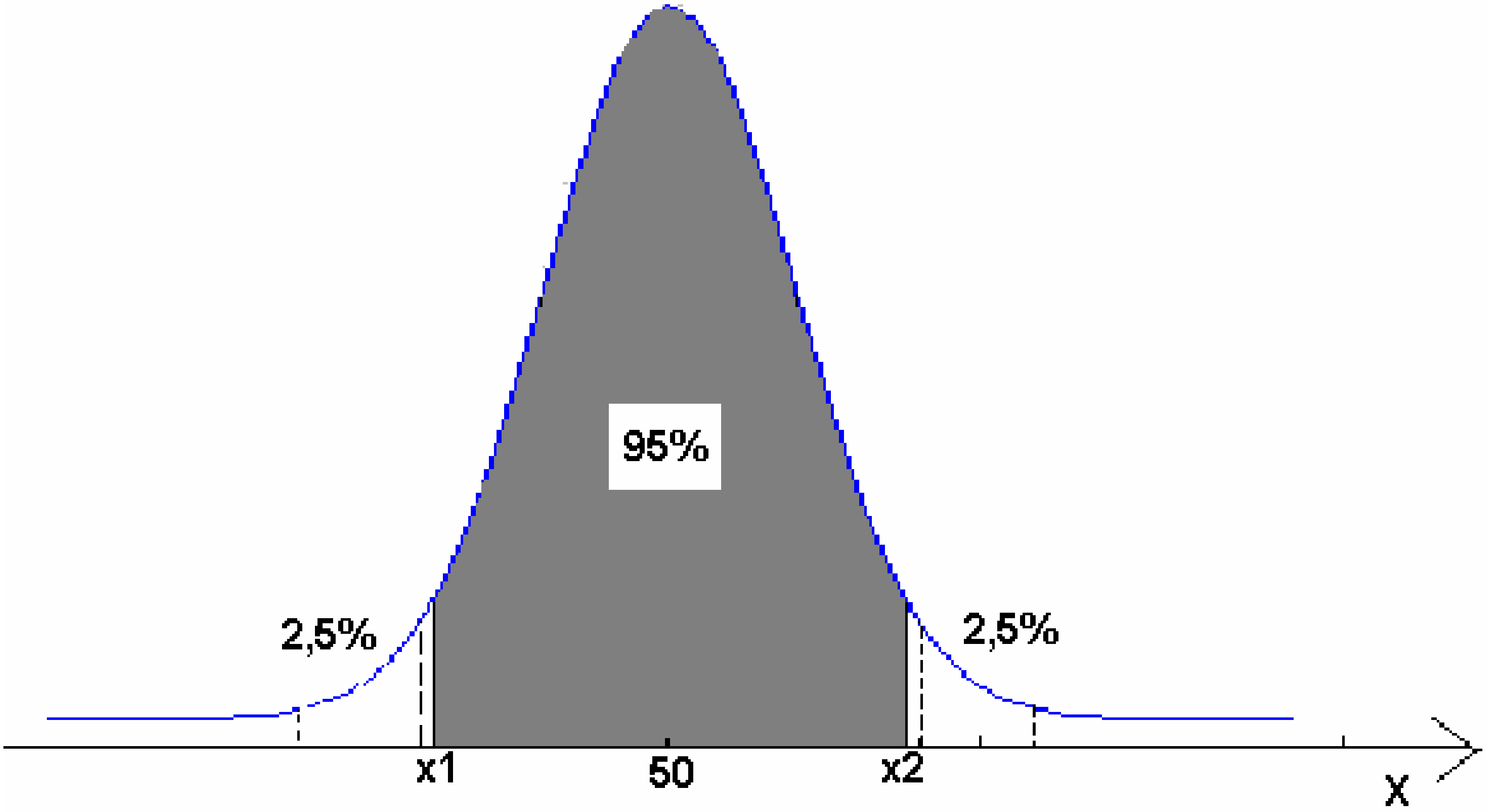
- $P(Z > 0{,}60) = 0{,}2743$
- $P(Z > -0{,}20) = 1 - P(Z > 0{,}20) = 1 - 0{,}4207 = 0{,}5793$
- $P(48 < X < 56) = P(-0{,}20 < Z < 0{,}60) = P(Z > -0{,}20) - P(Z > 0{,}60) = 0{,}5793 - 0{,}2743 = 0{,}3050$ (30,5%).

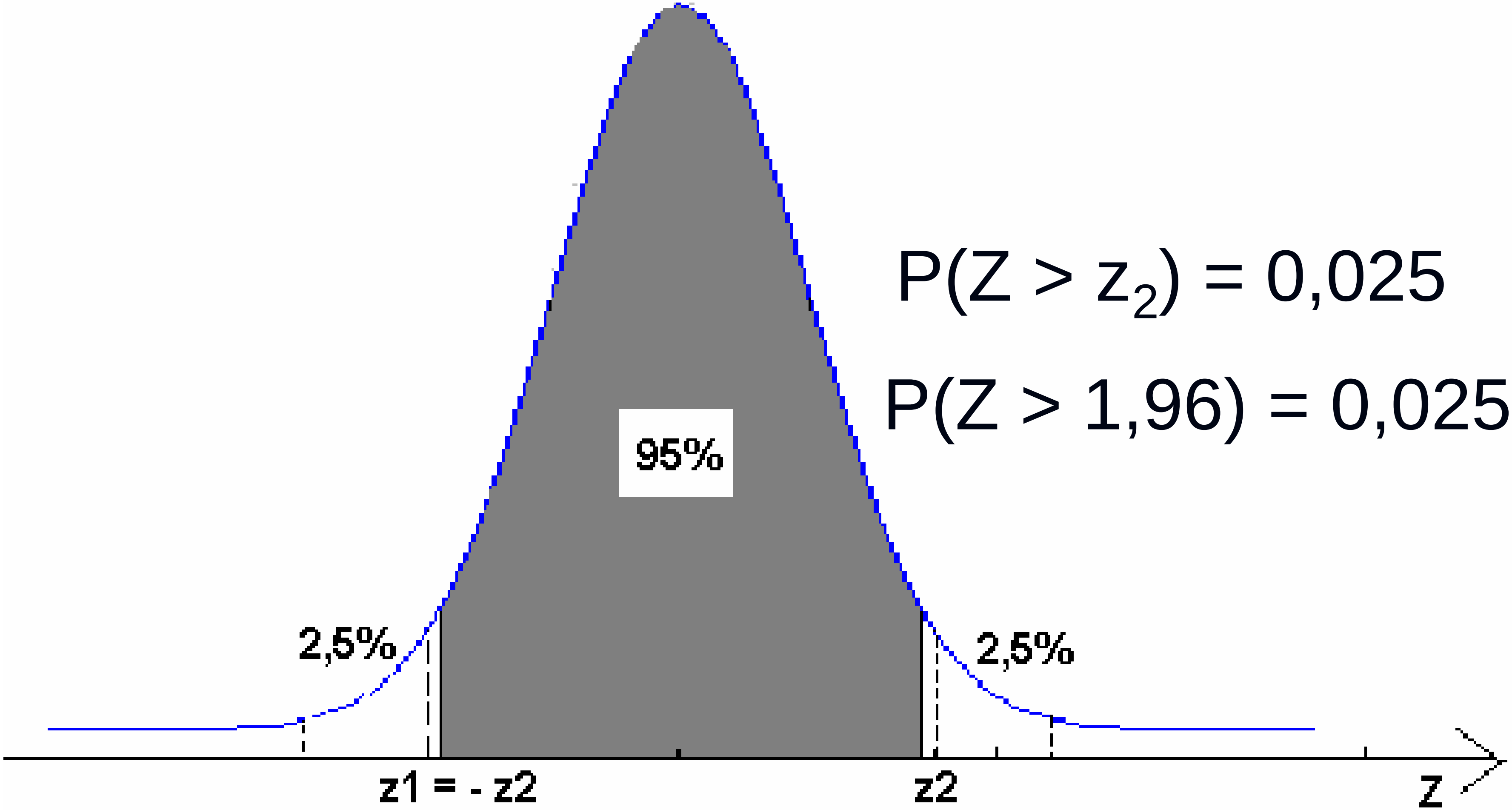
Exemplo 1

- No Excel:
  - $P(x_1<X<x_2)$ = DISTNORM(X_2;média;d.padrão;VERDADEIRO) – DISTNORM(X_1;média;d.padrão;VERDADEIRO)
  - $P(48<X<56)$ = DISTNORM(56;50;10;VERDADEIRO) – DISTNORM(48;50;10;VERDADEIRO) = 0,3050

Exemplo 2

- Veja o Exemplo 8 da Unidade 2.
- Supondo a mesma variável aleatória X com média 50 e desvio padrão 10. Encontre os valores de X, situados à mesma distância abaixo e acima da média, que contém 95% dos valores da variável.


95%
2,5%
2,5%
x1
50
x2
X



$P(Z > z_2) = 0{,}025$

$P(Z > 1{,}96) = 0{,}025$

$z_1 = -1{,}96$

$z_2 = 1{,}96$

Exemplo 2

- Agora é possível obter os valores de x_1 e x_2.

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad => \quad x = \mu + Z \times \sigma$$

- $\mathbf{x_1 = \mu + (z_1 \times \sigma) = 50 + [(-1{,}96) \times 10] = 30{,}4}$
- $\mathbf{x_2 = \mu + (z_2 \times \sigma) = 50 + (1{,}96 \times 10) = 69{,}6}$

Exemplo 2

- No Excel:
  - $P(x_1<X<x_2)=0,95$, $P(X<x_1)= 0,025$, $P(X<x_2)= 0,975$

INV.NORM(0,025;50;10) = 30,4

INV.NORM(0,975;50;10) = 69,6

Tô afim de saber..

- Sobre modelos probabilísticos para variáveis aleatórias contínuas:
  - BARBETTA, P.A., REIS, M.M., BORNIA, A.C. Estatística para Cursos de Engenharia e Informática. 3ª ed. São Paulo: Atlas, 2010, capítulo 6.
  - STEVENSON, Willian J. Estatística Aplicada à Administração. São Paulo: Ed. Harbra, 2001, capítulo 5.

Próxima aula

- Modelos probabilísticos para variáveis contínuas:
  - Aproximação do modelo binomial pelo normal.
  - Modelo t de Student
  - Modelo de quiquadrado