ESTATÍSTICA II AULA 2

Modelos probabilísticos mais comuns – Unidade 2

Para variáveis aleatórias discretas

Professor Marcelo Menezes Reis

Aulas prévias

- Estatística I – Unidade 6
- Conceitos básicos de probabilidade:
  - Experimento aleatório, espaço amostral, eventos, definições de probabilidade, probabilidade condicional, independência.
- Variável aleatória:
  - Conceito, variáveis discretas e contínuas, valor esperado e variância.

Conteúdo desta aula

- Principais modelos probabilísticos:
  - Variáveis aleatórias discretas:
    - binomial,
    - Poisson.
- Como usá-los no cálculo de probabilidades.
- OBJETIVO: quantificar incerteza de uma maneira mais simplificada.

Modelos para variáveis discretas

- Variável aleatória discreta: contradomínio finito ou infinito numerável.
- Modelo binomial: aplicável a casos em que o contradomínio é finito.
- Modelo de Poisson: também aplicável a casos em que o contradomínio é infinito numerável.

Modelo binomial

- Seja o seguinte experimento aleatório:
  - Número finito (n) de ensaios.
  - Cada ensaio tem apenas 2 resultados possíveis: “sucesso” ou “fracasso”.
  - Os ensaios são INDEPENDENTES entre si.
    - p = prob. de sucesso 1- p = prob. de fracasso são CONSTANTES.

Modelo binomial

- Experimento binomial
- X = no. de "sucessos" em n realizações.
- X segue o modelo binomial com os parâmetros n e p.
- $X = \{0, 1, ..., n\}$
- $E(X) = n \times p$ $V(X) = n \times p \times (1 - p)$

Modelo binomial

- Observar o número de caras em 3 lançamentos de uma moeda: $n=3$; $p=0,5$
- Observar o número de meninos nascidos em 3 partos de uma família: $n=3$; $p = x$
- Observar o número de componentes defeituosos em uma amostra de 10 que apresentaram anteriormente 1% de defeituosos: $n = 10$; $p= 0,01$.

Fórmula binomial

- A probabilidade de ocorrências de k sucessos em n tentativas será:

$$P(X = k) = C_{n,k} \times p^{k} \times (1 - p)^{n-k}$$

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k! \times (n - k)!}$$

Exemplo 1

- Exemplo 10 da Unidade 2. Estudos anteriores mostraram que há 73% de chance de consumidoras apresentarem uma reação positiva a anúncios publicitários com crianças. Uma agência apresentou um novo anúncio para 5 consumidoras. Qual é a probabilidade de que pelo menos 3 das 5 consumidoras apresentem reação positiva?

Exemplo 1

- Para cada consumidora ("ensaio") há apenas 2 resultados: reação positiva ou não.
- Há um número finito de realizações, **n** = 5.
- Definindo "sucesso" como reação positiva, e considerando as consumidoras "independentes".

Exemplo 1

- A variável aleatória X, número de consumidoras com reação positiva em 5 que assistiram o novo anúncio terá distribuição binomial com parâmetros
- **n** = 5 e **p** = 0,73 (e **1- p** = 0,27).
- Evento de interesse: $X \geq 3$

Exemplo 1

- P(X≥3) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)

$$P(X=3)=C_{5,3}\times 0{,}73^{3}\times(0{,}27)^{2}=\frac{5!}{3!\times(5-3)!}\times 0{,}73^{3}\times(0{,}27)^{2}=0{,}284$$

$$P(X=4)=C_{5,4}\times 0{,}73^{4}\times(0{,}27)^{1}=\frac{5!}{4!\times(5-4)!}\times 0{,}73^{4}\times(0{,}27)^{1}=0{,}383$$

$$P(X=5)=C_{5,5}\times 0{,}73^{5}\times(0{,}27)^{0}=\frac{5!}{5!\times(5-5)!}\times 0{,}73^{5}\times(0{,}27)^{0}=0{,}207$$

- **P(X ≥ 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0,284 + 0,383 + 0,207 = 0,874**

Exemplo 1 – No Excel

- O Excel permite o cálculo de probabilidade pela distribuição binomial.
- DISTRBINOM(x_i;n;p;FALSO) = $P(X = x_i)$
- DISTRBINOM(x_i;n;p;VERDADEIRO) = $P(X \leq x_i)$
- $P(X \geq x_i)$ = 1 - DISTRBINOM(x_i;n;p;VERDADEIRO)
- $P(X \geq 3)$ = 1 - DISTRBINOM(**2**;5;0,73;VERDADEIRO)
- $P(X \geq 3) = 0{,}874$

Modelo de Poisson

- Experimento binomial mas com n “infinito”.
- Modelo binomial não pode ser usado.
- Modelo de Poisson:
  - Analisar as ocorrências em um período contínuo.
  - Uso de uma quantidade constante: valor esperado.

Modelo de Poisson

- $m = \lambda \times t$
- λ = taxa de ocorrência do evento em um período contínuo (histórico ou experimental).
- t = período contínuo (tempo, área, comprimento) sob análise.

Modelo de Poisson

- A variável aleatória X, número de sucessos em um período contínuo t seguirá o modelo de Poisson com os parâmetros λ e t.

$$P(X = k) = \frac{e^{-m} \times m^{k}}{k!}$$

- Onde m = λ × t; e = 2,71...

Modelo de Poisson

- $E(X) = m = \lambda \times t$ $V(X) = m = \lambda \times t$
- Modelo usado para modelar filas.
- Número mensal de acidentes de tráfego em um cruzamento.
- Número de itens defeituosos produzidos por hora em uma indústria.

Exemplo 2

- Exemplo 11 da Unidade 2.
- Em um porto estudos históricos mostram que chegam em média 2 navios por dia, de acordo com a distribuição de Poisson.
- Sabendo que o porto pode atender apenas 2 navios por dia, calcule a probabilidade de navios que chegarem em um determinado dia não serem atendidos.

Exemplo 2

- A variável aleatória X, número de navios que chegam em um porto em um dia segue uma distribuição de Poisson com taxa (λ) igual a 2.
- $X = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ sem limite superior
- Se mais de 2 navios chegarem, não serão atendidos:
  - $P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) + ...$

Exemplo 2

- P(X > 2) = 1 – P(X ≤ 2)
- P(X > 2) = 1 – P(X = 0) – P(X = 1) – P(X = 2)
- $P(X = 0) = \dfrac{e^{-2\times 1}\times(2)^0}{0!} = 0{,}1353$
- $P(X = 1) = \dfrac{e^{-2\times 1}\times(2)^1}{1!} = 0{,}2707$
- $P(X = 2) = \dfrac{e^{-2\times 1}\times(2)^2}{2!} = 0{,}2707$

Exemplo 2

- $P(X > 2) = 1 - 0{,}1353 - 0{,}2707 - 0{,}2707$
- $P(X > 2) = 0{,}3233$
- No Excel:
  - POISSON(x_i;$\lambda \times t$;FALSO) = $P(X = x_i)$
  - POISSON(x_i;$\lambda \times t$;VERDADEIRO) = $P(X \leq x_i)$

P(X > 2) = 1 – POISSON(2;2;VERDADEIRO) = 0,3233

Tô afim de saber...

- Sobre modelos probabilísticos para variáveis aleatórias discretas:
  - BARBETTA, P.A., REIS, M.M., BORNIA, A.C. Estatística para Cursos de Engenharia e Informática. 3ª ed. São Paulo: Atlas, 2010, capítulo 5.
  - STEVENSON, Willian J. Estatística Aplicada à Administração. São Paulo: Ed. Harbra, 2001, capítulo 4.

Próxima aula

- Modelos probabilísticos para variáveis aleatórias discretas:
  - Uniforme.
  - Normal.
  - t de Student.
  - Quiquadrado.