ESTATÍSTICA II AULA 01

Variáveis Aleatórias – Unidade 1

Professor Marcelo Menezes Reis

Aulas prévias – Estatística I

- Unidade 6
- Conceitos básicos de probabilidade:
  - Experimento aleatório, espaço amostral, eventos.
  - Definições de probabilidade.
  - Probabilidade condicional e eventos independentes.

Conteúdo desta aula

- Conceito de variável aleatória.
- Variáveis aleatórias discretas e contínuas.
- Distribuições de probabilidade.
- Conceito de valor esperado e variância, propriedades.

Variável aleatória

- Modelos probabilísticos
  - Espaço amostral definido de forma "verbal".
  - Associadas probabilidades aos resultados.
  - Por que não definir o espaço amostral numericamente?

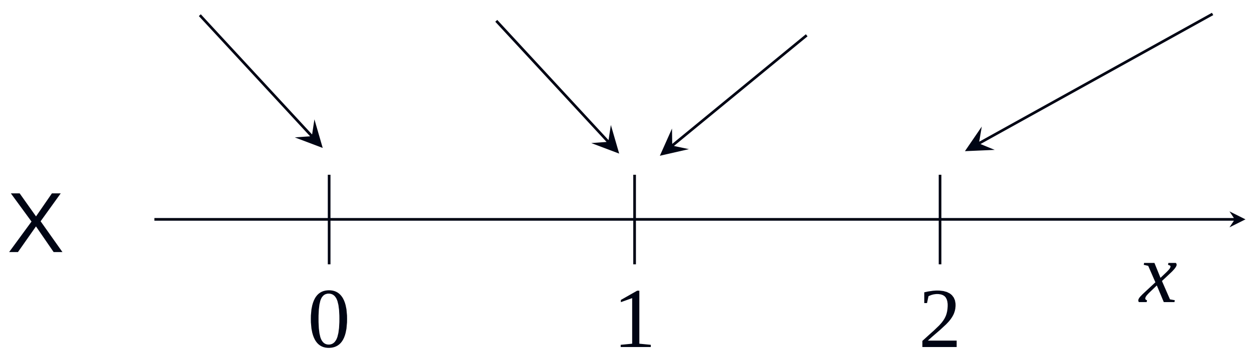
Variável aleatória

- “Uma variável aleatória é uma função com valores **numéricos**, cujo valor é determinado por fatores de chance.”
- Função matemática que associa números reais (contradomínio da função) aos resultados de um Espaço Amostral (domínio da função), por sua vez vinculado a um Experimento Aleatório.

Variável aleatória

X = número de coroas em 2 lançamentos de uma moeda

Ω = {(cara, cara), (cara, coroa), {coroa, cara), (coroa, coroa)}



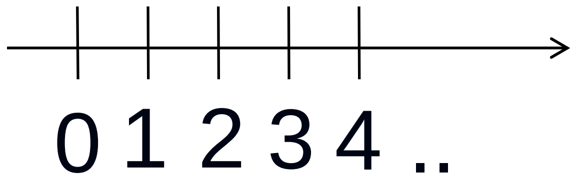
Exemplos

- Número de peças com defeito em um lote produzido.
- Número de acidentes registrados durante um mês na BR.101.
- Na *internet*, o tempo (em segundos) para que uma determinada mensagem chega ao seu destino.
- Se uma mensagem chega (X = 1), ou não (X = 0), ao seu destino

variável aleatória

discreta

os resultados estão em um conjunto finito ou enumerável



número de defeitos em ...

contínua

os resultados abrangem todo um intervalo de números reais

tempo de resposta de ...

Distribuição de probabilidades

- Como a probabilidade total (1) do espaço amostral distribui-se entre os valores da variável aleatória.
- Diferenças:
  - Se discreta: pares valor – probabilidade.
  - Se contínua: função.

Distribuição para variáveis discretas

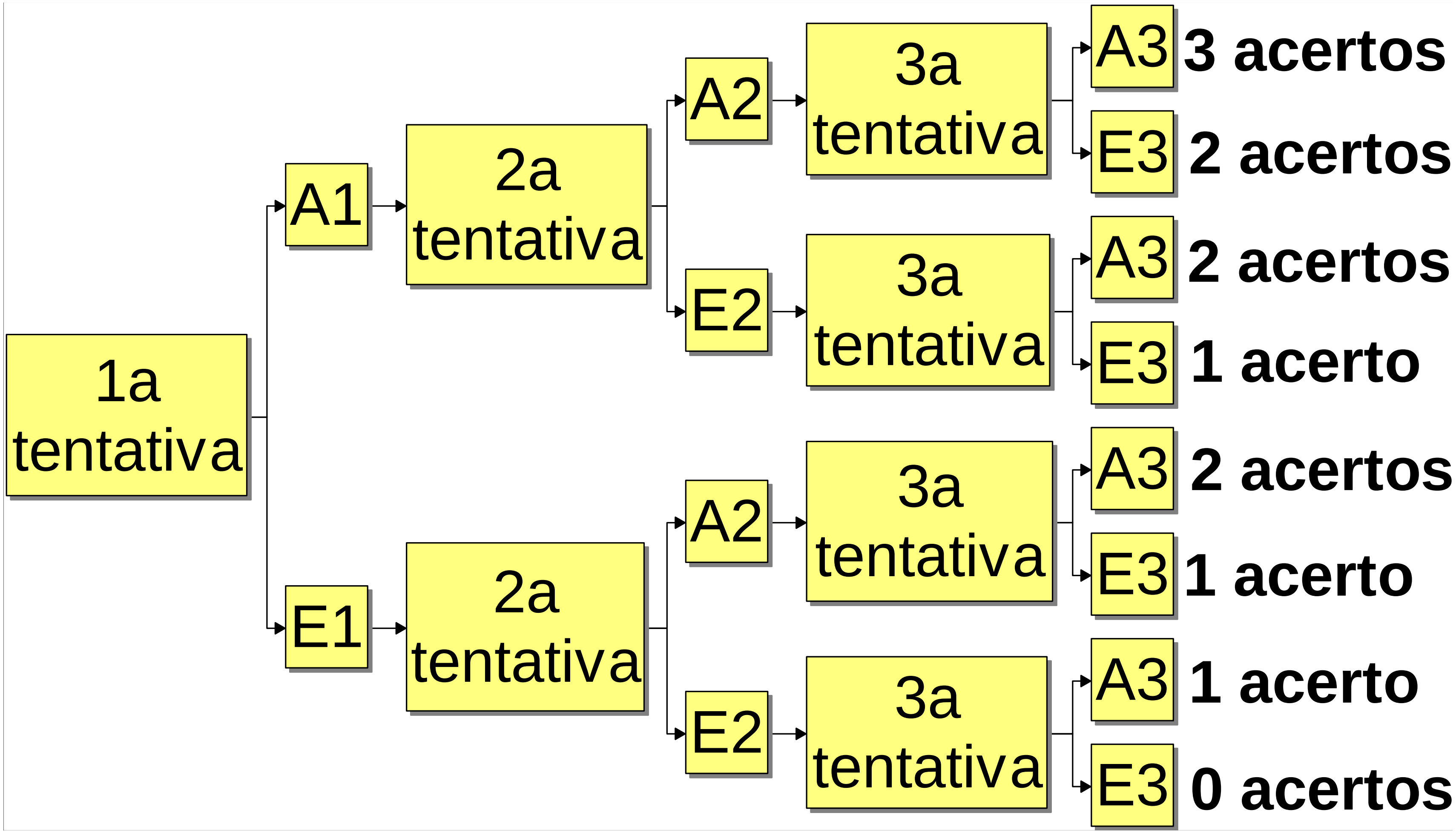
- Definir o conjunto de pares [x_i, $p(x_i)$].
- x_i é um valor qualquer da variável.
- $p(x_i)$ é a probabilidade de ocorrência do valor de x_i.
- A soma das probabilidades de todos os resultados tem que ser igual a 1,0.

Exemplo 1

- Primeiro exemplo da Unidade 1.
- Imagine que o Ruinzinho está treinando cobranças de pênaltis. Historicamente a probabilidade de acertar uma cobrança, supondo que acertou a anterior é de 60%. Mas, se ele tiver errado a anterior a probabilidade de acertar cai para 30%. Construa a distribuição de probabilidades do número de acertos em 3 tentativas de cobrança.

Exemplo 1

- Variável aleatória X: número de acertos em 3 tentativas.
- Contradomínio de X: {0, 1, 2, 3}.
- Contradomínio finito: variável aleatória discreta.
- Encontrar as probabilidades de ocorrência de cada resultado.


1a tentativa
A1
E1
2a tentativa
2a tentativa
A2
E2
A2
E2
3a tentativa
3a tentativa
3a tentativa
3a tentativa
A3
3 acertos
E3
2 acertos
A3
2 acertos
E3
1 acerto
A3
2 acertos
E3
1 acerto
A3
1 acerto
E3
0 acertos

Exemplo 1

- $X = 0 \Leftrightarrow [E_1 \cap E_2 \cap E_3]$
- $X = 1 \Leftrightarrow [(A_1 \cap E_2 \cap E_3) \cup (E_1 \cap A_2 \cap E_3) \cup (E_1 \cap E_2 \cap A_3)]$
- $X = 2 \Leftrightarrow [(A_1 \cap A_2 \cap E_3) \cup (E_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A1 \cap E2 \cap A3)]$
- $X = 3 \Leftrightarrow [A_1 \cap A_2 \cap A_3]$

Exemplo 1

- $P(X=0) = P[E_1 \cap E_2 \cap E_3]$
- $P(X=1) = P[(A_1 \cap E_2 \cap E_3) \cup (E_1 \cap A_2 \cap E_3) \cup (E_1 \cap E_2 \cap A_3)]$
- $P(X=2) = P[(A_1 \cap A_2 \cap E_3) \cup (E_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap E_2 \cap A_3)]$
- $P(X=3) = P[A_1 \cap A_2 \cap A_3]$

Exemplo 1

- $P(A_1) = 0,5$ e $P(E_1) = 0,5$
- $P(A_{i+1}|A_i) = 0,6$ Pelo complementar obtém-se $P(E_{i+1}|A_i) = 0,4$
- $P(A_{i+1}|E_i) = 0,3$ Pelo complementar obtém-se $P(E_{i+1}|E_i) = 0,7$
- Para X = 1 e X = 2 os eventos componentes são M.E..

Exemplo 1

- $P(X=0) = P[E_1 \cap E_2 \cap E_3] = P(E_1) \times P(E_2 | E_1) \times P(E_3 | E_2)$
- $P(X=0) = 0,5 \times 0,7 \times 0,7 = 0,245$ (24,5%)
- $P(X=3) = P[A_1 \cap A_2 \cap A_3] = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times P(A_3|A_2) = 0,5 \times 0,6 \times 0,6 = 0,18$ (18%)

Exemplo 1

- $P(X=1) = P(A_1 \cap E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap A_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap A_3)$
- $P(X=1) = P(A_1) \times P(E_2|A_1) \times P(E_3|E_2) + P(E_1) \times P(A_2|E_1) \times P(E_3|A_2) + P(E_1) \times P(E_2|E_1) \times P(A_3|E_2)$
- $P(X=1) = 0{,}5 \times 0{,}4 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}3 \times 0{,}4 + 0{,}5 \times 0{,}7 \times 0{,}3 = 0{,}305$

Exemplo 1

- $P(X=2) = P(A_1 \cap A_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap E_2 \cap A_3)$
- $P(X=2) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times P(E_3|A_2) + P(E_1) \times P(A_2|E_1) \times P(A_3|A_2) + P(A_1) \times P(E_2|A_1) \times P(A_3|E_2)$
- $P(X = 2) = 0{,}5 \times 0{,}6 \times 0{,}4 + 0{,}5 \times 0{,}3 \times 0{,}6 + 0{,}5 \times 0{,}4 \times 0{,}3 = 0{,}27$ (27%)

Exemplo 1

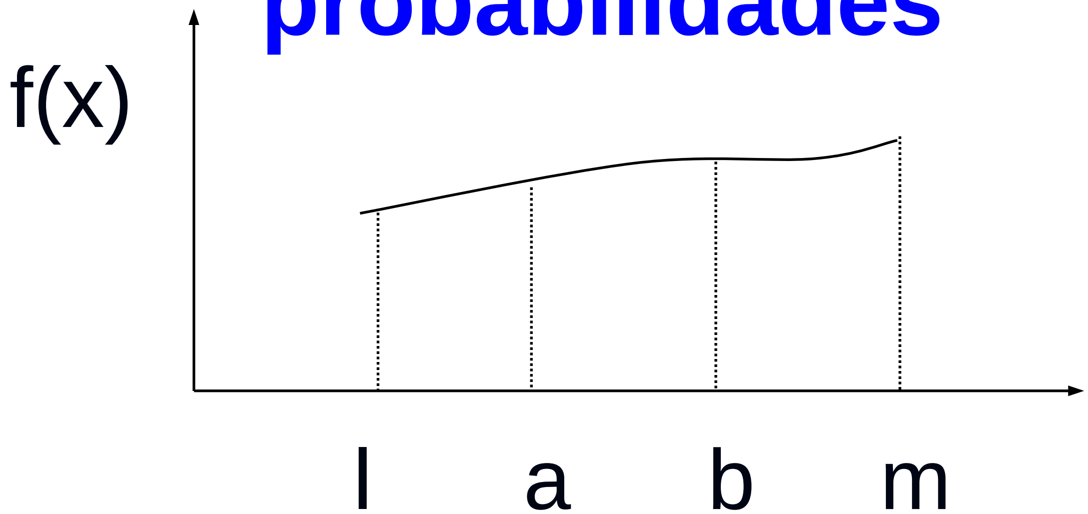
- Distribuição de probabilidades do número de acertos em 3 tentativas

X	$p(X = x_i)$
0	0,245
1	0,305
2	0,270
3	0,180
Total	1,0

Distribuição para variáveis contínuas

- Contradomínio infinito: pares x_i e $p(x_i)$ não fazem sentido.
- Função densidade de probabilidades f(x):
  - Não negativa.
  - Definida para todos os valores da variável.

Função densidade de probabilidades



P(a<X<b) = integral de f(x) de a a b.

Fórmulas simples ou tabelas.

Valor Esperado

- Expectância E(X).
- Média com probabilidades ao invés de freqüências.
- Centro de massa da distribuição de probabilidades.
- Muito útil na comparação de cursos de ação: maior lucro esperado.

Valor Esperado

- Variáveis aleatórias discretas:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p(x_i)$$

- Variáveis aleatórias contínuas:
  - Utilização de integrais ou fórmulas.

Variância

- V(X).
- É a variância da Unidade 3 de Estatística I com probabilidades ao invés de frequências.
- Mede a dispersão dos dados em torno do valor esperado.

Variância

- Variáveis aleatórias discretas:

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} \times p(x_i) - \left[E(X)\right]^2$$

- Variáveis aleatórias contínuas:
  - Utilização de integrais ou fórmulas.

Propriedades do valor esperado

- Seja k uma constante e X e Y variáveis aleatórias:
  - $E(k) = k$
  - $E(k \pm X) = k \pm E(X)$
  - $E(k \times X) = k \times E(X)$
  - $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$
  - Se X e Y independentes:
    - $E(X \times Y) = E(X) \times E(Y)$

Propriedades da variância

- Seja k uma constante e X e Y variáveis aleatórias:
  - $V(k) = 0$
  - $V(k \pm X) = V(X)$
  - $V(k \times X) = k^2 \times V(X)$
  - Se X e Y são independentes:
    - $V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$

Tô afim de saber...

- Sobre variáveis aleatórias e propriedades de valor esperado e variância:
  - BARBETTA, P.A., REIS, M.M., BORNIA, A.C. Estatística para Cursos de Engenharia e Informática. 3ª ed. São Paulo: Atlas, 2010, capítulos 5 e 6.
  - STEVENSON, Willian J. Estatística Aplicada à Administração. São Paulo: Ed. Harbra, 2001, capítulos 4 e 5.

Próxima aula

- Modelos probabilísticos mais comuns
  - Variáveis aleatórias discretas:
    - Binomial;
    - Poisson.